Полтавська районна олімпіада з математики 2019-2020 н.р.

(ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики)

9 клас

Умови та розв'язання

1. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{9-x^{2}}\geq x^{2}+3$

***Відповідь:*** *х*=0

***Розв’язання***

Якщо x=0, то $\sqrt{9-x^{2}}=3=x^{2}+3 $і нерівність

$\sqrt{9-x^{2}}\geq x^{2}+3 $справджується. А якщо $0<x^{2}\leq 9$,

то $\sqrt{9-x^{2}}<3<x^{2}+3$, тоді нерівність не справджується.

1. За умови, що попарно різні числа *x*, *y*, *u*, *v* задовольняють співвідношення

$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$, яких значень може набувати сума *x*  *y*  *u*  *v* ?

***Відповідь:*** сума може набувати лише значення 0.

***Розв’язання***

Проведемо такі перетворення:

$$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}; \left(x+u\right)\left(y+u\right)=\left(x+v\right)\left(y+v\right);$$

$$xy+xu+uy+u^{2}=xy+xv+vy+v^{2};$$

$xu+uy+u^{2}$=$ xv+vy+v^{2}$; $x\left(u-v\right)+y\left(u-v\right)+\left(u+v\right)\left(u-v\right)=0;$

$\left(x+y+u+v\right)\left(u-v\right)=0. $

Оскільки за умовою числа попарно різні, то $u-v\ne 0$,

отже $x+y+u+v=0$

З іншого боку, якщо $x+y+u+v=0$, а також $x+y\ne 0, $ та $y+u\ne 0, $ то

$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$*,* тому попарно різнічисла *x,y,u,v* , що задовольняють умову задачі існують, наприклад: 0,1,2 та –3.

1. Знайдіть усі пари простих чисел , які задовольняють рівність

$$p^{2}-q^{2}=4q-p$$

***Відповідь:*** *p*=3, *q*=2.

***Розв’язання***

Якщо переписати цю рівність у такому вигляді: *p(p+*1*) = q(q+*1*)*, то можливі два випадки.

1) *p = q*, тоді *p*=0, що неможливо.

2) $p\ne q$, тоді *p* + 1 ділиться на *q*, а *q* + 4 ділиться на *p*.

Покладемо *p* + 1= *nq* , де $n\in N$ .

Тоді рівняння набуває вигляду ( *nq* – 1)*nq* = *q*(*q* +4) або $n^{2}q-n=q+4$ , таким чином $q=\frac{4+n}{n^{2}-1}\geq 2$ , звідки повинна виконуватися нерівність

$2n^{2}-n-2\leq 0$ , тому *n* = 1 , і  *p* + 1 = *q* , звідки очевидно, що прості числа відрізняються на 1, тому це 2 чи 3. Перевіркою переконаємося, що *p*=3, *q*=2 задовольняє умову.



1. У трикутнику *ABC* кут *BAC* дорівнює 40, а сторони *AB* та *AC* рівні. На сторонах *AB* та *BC* трикутника вибрано точки *S* і *T* відповідно так, що *BAT*  *BCS*  10. Прямі *AT* та *CS* перетинаються в точці *P*. Доведіть, що *TB*  2*TP* .

***Розв’язання***

Оскільки трикутник *АВС* рівнобедрений, то ∠*ABC* = ∠*BCA* = (180° – ∠*BAC*)/2=70°

Звідси ∠*TAC*=∠*BAC*–∠*BAT*=30°, ∠*SCA*=∠*BCA*–∠*BCS*=60° ∠*TPS*=∠*APC*=180°–∠*TAC*–∠*SCA*=90°

Далі, трикутники *ABT* та *CBS* подібні за кутами ∠*ABT*=∠*CBS* та ∠*BAT*=∠*BCS*. Таким чином$ \frac{AB}{BT}=\frac{CB}{BS}$, звідки $\frac{AB}{CB}=\frac{BT}{BS}$ . Отже, $∆TBS\~∆ABC$ за спільним кутом ∠*B* та пропорційними прилеглими сторонами . Тому $\frac{TB}{TS}=\frac{AB}{AC}=1$, тобто *TB*=*TS*, a ∠*BST*= ∠*BCA*=70°.

 А оскільки ∠*ASC =*180° *–* ∠*BAC–* ∠*SCA=*80°, то

∠*PST=*180° *–* ∠*BST–* ∠*ASC=*30°.

 Отже, $\frac{TP}{TB}=\frac{TP}{TS}=sin∠PST=sin30°=\frac{1}{2}$ , що і треба було довести.

1. Натуральне число *n*  18 таке, що числа *n* 1 та *n*  1 прості. Доведіть, що *n* має принаймні вісім різних натуральних дільників.

***Розв’язання***

Якщо *n* непарне, то обидва числа *n* – 1 та *n +* 1 парні і, як наслідок, складені. Якщо *n* не ділиться на 3, то одне з чисел *n* – 1 або *n +* 1 кратне 3, а отже складене. Таким чином, *n* ділиться на 2 і на 3. Якщо *n* ділиться ще й на деяке просте число *p*, відмінне від 2 і від 3, то *n* має такі вісім різних натуральних дільників:

1,2,3,6, *p*, 2 *p*, 3*p*, 6*p*.

Хай тепер число *n* не має простих дільників, відмінних від 2 і 3,

тобто $n=2^{m}∙3^{k}, m\geq 1, k\geq 1.$

Якщо *m*=1, то $k\geq 3$ ( інакше $n$ не буде більшим за 18). У такому випадку число *n* має вісім дільників:

1, 2, 3, $ 2∙3, 3^{2}, 2∙3^{2}, 3^{3}, 2∙3^{3}. $

Якщо *k* = 1, то $m\geq 3$. Тоді число *n*  має дільники

1, 3, 2, $ 3∙2, 2^{2}, 3∙2^{2}, 2^{3}, 3∙2^{3}. $

А у випадку, коли $m\geq 2, k\geq 2,$ *n* ділиться відразу на дев’ять різних натуральних чисел

1, 2, 3, $ 2∙3, 2^{2}, 3^{2},3∙2^{2}, 2∙3^{2}, 2^{2}∙3^{2}. $

Твердження доведене.