Полтавська районна олімпіада з математики 2019-2020 н.р.

(ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики)

9 клас

Умови та розв'язання

1. Розв'яжіть нерівність:

***Відповідь:*** *х*=0

***Розв’язання***

Якщо x=0, то і нерівність

справджується. А якщо ,

то , тоді нерівність не справджується.

1. За умови, що попарно різні числа *x*, *y*, *u*, *v* задовольняють співвідношення

, яких значень може набувати сума *x*  *y*  *u*  *v* ?

***Відповідь:*** сума може набувати лише значення 0.

***Розв’язання***

Проведемо такі перетворення:

=;

Оскільки за умовою числа попарно різні, то ,

отже

З іншого боку, якщо , а також та то

*,* тому попарно різнічисла *x,y,u,v* , що задовольняють умову задачі існують, наприклад: 0,1,2 та –3.

1. Знайдіть усі пари простих чисел , які задовольняють рівність

***Відповідь:*** *p*=3, *q*=2.

***Розв’язання***

Якщо переписати цю рівність у такому вигляді: *p(p+*1*) = q(q+*1*)*, то можливі два випадки.

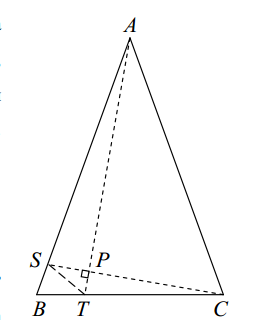
1) *p = q*, тоді *p*=0, що неможливо.

2) , тоді *p* + 1 ділиться на *q*, а *q* + 4 ділиться на *p*.

Покладемо *p* + 1= *nq* , де .

Тоді рівняння набуває вигляду ( *nq* – 1)*nq* = *q*(*q* +4) або , таким чином , звідки повинна виконуватися нерівність

, тому *n* = 1 , і  *p* + 1 = *q* , звідки очевидно, що прості числа відрізняються на 1, тому це 2 чи 3. Перевіркою переконаємося, що *p*=3, *q*=2 задовольняє умову.



1. У трикутнику *ABC* кут *BAC* дорівнює 40, а сторони *AB* та *AC* рівні. На сторонах *AB* та *BC* трикутника вибрано точки *S* і *T* відповідно так, що *BAT*  *BCS*  10. Прямі *AT* та *CS* перетинаються в точці *P*. Доведіть, що *TB*  2*TP* .

***Розв’язання***

Оскільки трикутник *АВС* рівнобедрений, то ∠*ABC* = ∠*BCA* = (180° – ∠*BAC*)/2=70°

Звідси ∠*TAC*=∠*BAC*–∠*BAT*=30°, ∠*SCA*=∠*BCA*–∠*BCS*=60° ∠*TPS*=∠*APC*=180°–∠*TAC*–∠*SCA*=90°

Далі, трикутники *ABT* та *CBS* подібні за кутами ∠*ABT*=∠*CBS* та ∠*BAT*=∠*BCS*. Таким чином, звідки . Отже, за спільним кутом ∠*B* та пропорційними прилеглими сторонами . Тому , тобто *TB*=*TS*, a ∠*BST*= ∠*BCA*=70°.

А оскільки ∠*ASC =*180° *–* ∠*BAC–* ∠*SCA=*80°, то

∠*PST=*180° *–* ∠*BST–* ∠*ASC=*30°.

Отже, , що і треба було довести.

1. Натуральне число *n*  18 таке, що числа *n* 1 та *n*  1 прості. Доведіть, що *n* має принаймні вісім різних натуральних дільників.

***Розв’язання***

Якщо *n* непарне, то обидва числа *n* – 1 та *n +* 1 парні і, як наслідок, складені. Якщо *n* не ділиться на 3, то одне з чисел *n* – 1 або *n +* 1 кратне 3, а отже складене. Таким чином, *n* ділиться на 2 і на 3. Якщо *n* ділиться ще й на деяке просте число *p*, відмінне від 2 і від 3, то *n* має такі вісім різних натуральних дільників:

1,2,3,6, *p*, 2 *p*, 3*p*, 6*p*.

Хай тепер число *n* не має простих дільників, відмінних від 2 і 3,

тобто

Якщо *m*=1, то ( інакше не буде більшим за 18). У такому випадку число *n* має вісім дільників:

1, 2, 3,

Якщо *k* = 1, то . Тоді число *n*  має дільники

1, 3, 2,

А у випадку, коли *n* ділиться відразу на дев’ять різних натуральних чисел

1, 2, 3,

Твердження доведене.