Відповіді до завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2018-2019 н. р.

7 клас

Всі завдання оцінюються по 7 балів кожне.

1. Розв'яжіть рівняння: $\left|\left||x-1|+1\right|-1\right|=0$.

Відповідь: $x=1$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $\left|\left||x-1|+1\right|-1\right|=0 \Rightarrow \left||x-1|+1\right|=1$, оскільки $|x-1|+1>0$, то далі маємо, що $|x-1|+1=1 \Rightarrow |x-1|=0 \Rightarrow x=1$.

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел m та n, які задовольняють рівність

$5m - mn = 9n^2$.

Відповідь:

m = 12 , n = 2 або m = 144 , n = 4 .

Розв'язання. Оскільки $9n^2>0$, то $m(5-n)=9n^2>0$. Тож n може набувати лише одного з чотирьох значень 1, 2, 3 або 4. Залишається провести перебір:

n = 1 ⇒ 4 m= 9 — розв'язків немає.
n = 2 ⇒ 3 m =36 — маємо розв'язок (12, 2).
n = 3 ⇒ 2 m =81 — розв'язків немає.
n = 4 ⇒ m = 144 — маємо розв'язок (144, 4).

3. Андрійко задумав трицифрове число, остання цифра якого дорівнює 2. Якщо переставити останню цифру на початок числа, то отримаємо число, яке на 54 більше, ніж задумане. Знайдіть число, яке задумав Андрійко.

Відповідь: 162.

Розв'язання.. Нехай задане число $\overline{ab2}=\overline{ab}\cdot 10+2$. $\overline{2ab}=200+\overline{ab}$ – число після перестановки. За умовою $\overline{ab}\cdot 10+2+54=200+\overline{ab}$. Звідси $\overline{ab}=16$.

4. Сторони чотирикутника *ABCD* мають такі довжини: $AB=9$, $BC=2$, $CD=14$, $DA=5$. Знайдіть довжину діагоналі *AC*, якщо відомо, що вона є цілим числом.

Відповідь: $AC=10$.

Розв'язання. Застосуймо нерівність трикутника до ΔABC та до ΔACD: для першого матимемо, що $AB+BC>AC$, тобто що $AC<AB+BC=11$, а для другого трикутника — що $DA+AC>CD$, тобто $AC>CD-DA=9$. Таким чином, $9<AC<11$, звідки $AC=10$.

5. Олеся написала на дошці кілька попарно різних натуральних чисел. Андрійко не зміг вибрати серед цих чисел трьох, сума яких ділилася б на 3. Яку найбільшу кількість чисел могла виписати Олеся?

Відповідь: 4 числа.

Розв'язання. Олеся могла написати на дошці, приміром, такі чотири числа: 3, 4, 6, 7. Те, що сума жодних трьох із них не ділиться на 3, легко перевірити безпосереднім перебором.

Припустімо тепер, що Олесі вдалося виписати набір із п'яти чисел, який задовольняє умову. Розглянемо остачі, що їх дають записані числа в разі ділення на 3. Є лише три можливі залишки від ділення на 3 — 0, 1 і 2. Якщо всі три трапляються серед п'яти остач, які ми розглядаємо, то сума відповідних трьох чисел даватиме при діленні на 3 остачу $0+1+2=3$, тобто ділитиметься на 3. А якщо одного із залишків 0, 1, 2 немає, то за принципом Діріхле деяка з інших двох остач траплятиметься серед наших п'яти залишків хоча б тричі. Але й у цьому випадку сума трьох відповідних чисел ділитиметься на 3. Суперечність.

Отже, найбільша кількість чисел, які могла написати на дошці Леся, — 4.