Відповіді до завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2018-2019 н. р.

10 клас

Всі завдання оцінюються по 7 балів кожне.

1. Доведіть, що коли a>0, b>0, c>0, то

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geq 8.$$

Доведення

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}};$$

$$\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{ca}};$$

$$\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geq 2\sqrt{\frac{c^2}{ab}}.$$

Перемножимо ліві та праві частини отриманих нерівностей, отримуємо:

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}}\cdot 2\sqrt{\frac{b^2}{ca}}\cdot 2\sqrt{\frac{c^2}{ab}};$$

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geq 8\sqrt{\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{c^2}{ab}};$$

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geq 8.$$

2. Прості числа p,q,r, де 3<p<q<r, утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що різниця цієї прогресії кратна числу 6.

Доведення

Оскільки числа p,q,r прості та більші за 3, то усі вони непарні.

P=2k+1, де k – натуральне число.

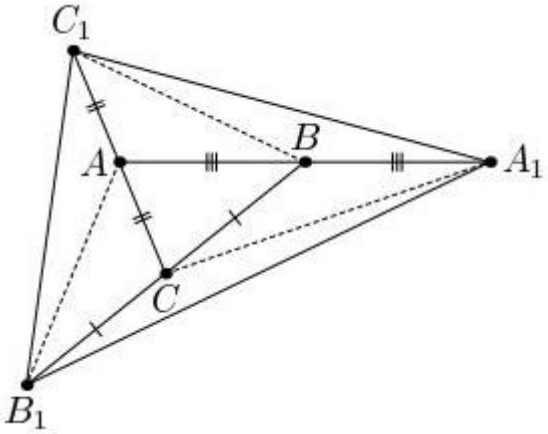
1) Різниця прогресії d не може бути непарною. Дійсно, якщо d- непарне, то d=2m+1, тоді q=2k+1+2m+1=2(k+m+1) – парне, не може бути простим.

Висновок: d – парне, отже кратне 2.

2) Припустимо, що різниця не кратна 3.
3) p – просте число більше за 3, тоді p=3m+1, або p=3m+1.
   d=3n+1 або d=3n+2.
   Якщо p=3m+1, d=3n+1, то q=3m+1+3n+1=3m+3n+2 ,
   r=3m+1+3n+1+3n+1=3m+6n+3 – кратне 3. Це суперечить твердженню, що усі члени прогресії – прості.
   Якщо p=3m+2, d=3n+1, то q=3m+2+3n+1=3m+3n+3 . Це суперечить твердженню, що усі члени прогресії – прості.
   Якщо p=3m+1, d=3n+2, то q=3m+1+3n+2=3m+3n+3. Це суперечить твердженню, що усі члени прогресії – прості.
   Якщо p=3m+2, d=3n+2, то q=3m+2+3n+2=3m+3n+4,
   r= 3m+2+3n+2+3n+2= 3m+3n +6. – крате 3. Це суперечить твердженню, що усі члени прогресії – прості.
   Висновок: d –кратне 3, отже, d –кратне 6, що і треба було довести.

3. Сторону AB трикутника ABC продовжили за вершину B та позначили на проміні AB точку A1 таким чином, що точка B – середина відрізку AA1. Сторону BC продовжили за вершину C і відмітили на продовженні точки B1 так, що C – середина BB1. Аналогічно, продовжили сторону CA за вершину A та відмітили на продовженні точку C1 таким чином, що A – середина CC1. Знайдіть площу трикутника A1B1C1, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1.

Розв'язання



Проведемо відрізки B_1A, C_1B та A_1C. Вони є медіани трикутників CB_1C_1, AC_1A_1 та BA_1B_1 відповідно. Скористуємося тим, що медіана трикутника ділить його на два рівновеликих трикутники. Тому площі трикутників CB_1A та C_1B_1A рівні. Крім того, оскільки AC – медіана трикутника BAB_1,

то рівні площі трикутників CB_1A і ABC. Тобто, площа трикутника CB_1C_1 удвічі більше площі трикутника ABC і дорівнює 2. Подібними міркуваннями отримаємо, що площа кожного з трикутників AC_1A_1 та BA_1B_1 також дорівнюють 2. Отже, площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 7.
Відповідь: 7.

4. Розв'язати рівняння:
$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$
Розв'язання.
Виділимо повні квадрати під знаками радикалів та вкажемо область допустимих значень змінної:
$\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1;$
$$\begin{cases}\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2\geq 0;\\ \left(\sqrt{x-1}-3\right)^2\geq 0;\\ x-1\geq 0\end{cases}$$

$x\in[1;+\infty)$

$\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$
Нулі підмодульних виразів:
x=5; x=10
Розкриємо модулі на проміжках та знайдемо розв'язки рівняння:
1) $x\in[1;5)$
$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1;$
$\sqrt{x-1}=2;$
$x=5.$
Не є коренем, бо не належить розглядуваному проміжку.
2) $x\in[5;10)$
$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1;$
$1=1.$
Усі числа проміжку є розв′язками рівняння.
3) $x\in[10;+\infty)$
$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1;$
$2\sqrt{x-1}=6;$
$x=10$
Розв'язком рівняння є проміжок:
$x\in[5;10]$
Відповідь:
$x\in[5;10]$

5. При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x+a|-1|=x-1$ має єдиний корінь.

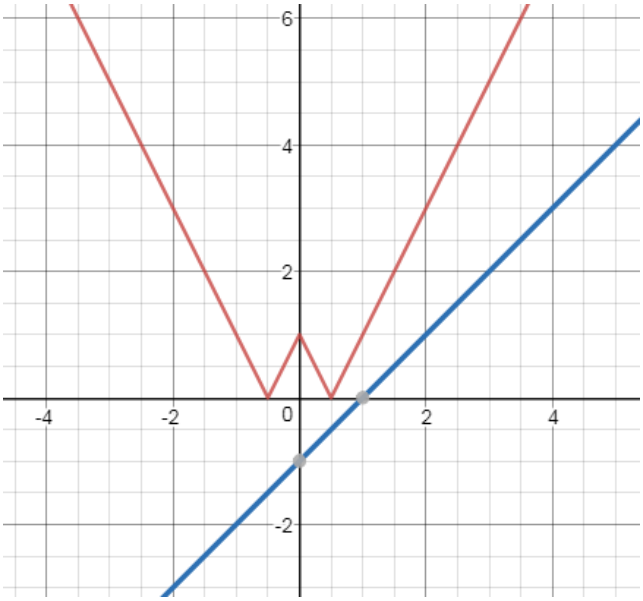
Розглянемо функцію: f(x)= $|2|x|-1|$. Побудуємо її графік за схемою:

y=2x-1; $y=2|x|-1$; $y=|2|x|-1|$.

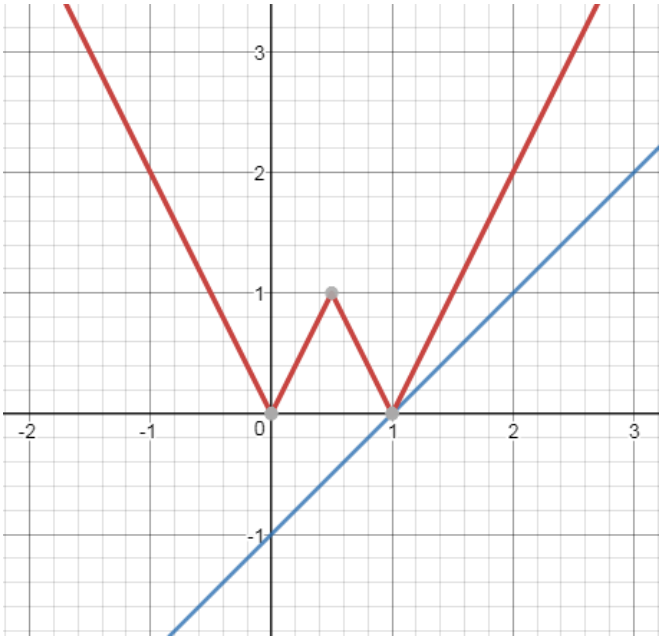
У цій же системі координат побудуємо графік функції:

y=x-1

Рівняння має єдиний розв'язок, якщо графіки функцій f(x)= $|2|x|-1|$ та y=x-1 перетинаються в одній точці.



Це можливо лише при русі графіку f(x)= $|2|x|-1|$ праворуч по осі координат на 0, 5.



Отже рівняння функції f(x) матиме вигляд: f(x)= $|2|x-0{,}5|-1|$

a=–0,5

Відповідь: a=–0,5